ВЛИЯНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИСКАЖЕНИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАБЛЮДЕНИЙ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КРИТЕРИЯ

С. Ю. Чернов

Последовательный подход [1] используется для статистического решения многих практических задач, в которых имеется необходимость проверки гипотетических предположений о параметрах исследуемого процесса. При выполнении модельных предположений такой подход требует в среднем меньшее число наблюдений для принятия решений среди всех возможных статистических критериев с такими же значениями вероятностей ошибок. Однако на практике искажения в предполагаемой модели могут оказать существенное влияние на значения вероятностных характеристик последовательных критериев. В [3] построен минимаксный робастный последовательный критерий для дискретного распределения вероятностей наблюдений. В [4] проведен анализ робастности, когда имеют место “засорения”, предложенные Тьюки и Хьюбером [2]. В данной работе закон распределения наблюдений отличается от распределения, используемого при построении теоретической модели, а в качестве меры различия используется L_1 метрика. При указанных предположениях проведен анализ робастности вероятностных характеристик ПКОВ проверки двух простых гипотез и предложен способ повышения робастности ПКОВ.

Пусть на измеримом пространстве $(\Omega, \Im)$ наблюдается последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $x_1, x_2, ... \in \mathbf{R}$, имеющих плотность распределения вероятностей $f(x;\theta)$ с параметром $\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$, истинное значение которого неизвестно. Обозначим функцию распределения вероятностей наблюдений x_i, $i = 1,2,\ldots$, через $F(x,\theta)$; $\Lambda_n = \Lambda_n(x_1,...x_n) = \sum_{t=1}^{n} \lambda_t$, где

$\lambda_t = \lambda(x_t) = \ln\left(f(x_t,\theta_1)/f(x_t,\theta_0)\right)$. (1)

Относительно параметра θ имеются две простые гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$, H_1: $\theta = \theta_1$. Для проверки данных гипотез используется последовательный критерий отношения вероятностей (ПКОВ) [1]:

$$N = \min\{n \in \mathrm{N} : \Lambda_n \notin (C_-, C_+)\}, \tag{2}$$

$$d = 1_{[C_+,+\infty)}(\Lambda_N), \tag{3}$$

где N – случайный момент остановки, после которого принимается решение d в соответствии с (3). В (2), (3) $C_-, C_+ \in \mathbf{R}$, $C_- < C_+$ – заданные параметры критерия, называемые порогами. На практике для их задания пользуются соотношениями [1] $C_- = \ln(\beta_0/(1-\alpha_0))$, $C_+ = \ln((1-\beta_0)/\alpha_0)$, где $\alpha_0, \beta_0 \in (0,1)$ – величины, близкие к приемлемым значениям вероятностей ошибок I и II рода.

Сформулируем следующие предположения: П1) функция $f(x,\theta)$ имеет конечные производные 1-го и 2-го порядка по переменной x, а также $f(x,\theta) \neq 0$, $\theta \in \Theta$; П2) функция $\lambda(x)$, определенная (1), строго монотонна по переменной x, а также имеет отличную от нуля производную 1-го порядка.

Без ограничения общности будем считать, что истинной гипотезой является H_0 (случай H_1 рассматривается аналогично).

Для оценивания вероятностей ошибочных решений последовательного критерия (2), (3) воспользуемся подходом, изложенным в [5]. Разобьем интервал (C_-, C_+) на m промежутков длиной $h = (C_+ - C_-)/m$, $m \in \mathbf{N}$ – параметр разбиения (аппроксимации). Введем случайные последовательности ($i \in \mathbf{N}$):

$$\Lambda_n^{\pm} = \sum_{t=1}^{n} \lambda_t^{\pm}; \ \lambda_1^- = C_- + \left[\frac{\lambda_1 - C_-}{h}\right] h, \ \lambda_t^- = \left[\frac{\lambda_t}{h}\right] h, \ t \geq 2; \ \lambda_i^+ = \lambda_i^- + h .$$

Построим поглощающие цепи Маркова L_n^-, L_n^+ со множеством значений $\{0, 1, \ldots, m, m+1\}$ и поглощающими состояниями 0 и $m+1$:

$$L_n^- = \begin{cases} 0, & \Lambda_n^- \in (-\infty, C_- - h], \\ i, & \Lambda_n^- = C_- + (i-1)h, \quad i = \overline{1,m}, \\ m+1, & \Lambda_n^- \in [C_+, \infty), \end{cases} \quad L_n^+ = \begin{cases} 0, & \Lambda_n^+ \in (-\infty, C_-], \\ i, & \Lambda_n^+ = C_- + ih, \quad i = \overline{1,m}, \\ m+1, & \Lambda_n^+ \in [C_+ + h, \infty). \end{cases}$$

В соответствии с [5], векторы вероятностей начальных состояний и матрицы вероятностей переходов цепей Маркова L_n^- и L_n^+ могут быть записаны в явном виде.

Пусть α^- и α^+ – вероятности поглощения цепей Маркова L_n^- и L_n^+ в состоянии $(m+1)$. В [5] показано, что вероятности α^-, α и α^+ удовлетворяют неравенству $\alpha^- \leq \alpha \leq \alpha^+$ и соотношению при $h \to 0$ $\alpha^+ - \alpha^- = O(h)$. Поэтому в качестве точечного приближения неизвестного значения α выбирается $\hat{\alpha}_m = (\alpha^+ + \alpha^-)/2$, причем

$|\alpha-\hat{\alpha}_m|\le\left(\alpha^+-\alpha^-\right)/2$. В дальнейшем вместо вероятности α будем анализировать величины α^- и α^+.

Пусть наблюдения x_n, $n\in\mathrm{N}$, имеют плотность распределения вероятностей $h(x,\theta)$, которая может отличаться от теоретической плотности распределения вероятностей $f(x,\theta)$. Однако известно, что расстояние в L_1 метрике между $h(x,\theta)$ и $f(x,\theta)$ не превышает ε:

$$\int_{\mathrm{R}}|h(x,\theta)-f(x,\theta)|\,dx\le\varepsilon, \tag{4}$$

где $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, причем величина ε_0 задается заранее. Множество плотностей распределения вероятностей $h(x,\theta)$, удовлетворяющих (4) при фиксированном ε, обозначим $L_1(f,\varepsilon)$.

Цепи Маркова L_n^- и L_n^+ в случае, когда наблюдения имеют плотность распределения вероятностей $h(\cdot,\theta)$, обозначим соответственно $L_n^-(h)$ и $L_n^+(h)$. Пусть $\alpha^-(h,\varepsilon)$ и $\alpha^+(h,\varepsilon)$ – вероятности поглощения цепей Маркова $L_n^-(h)$ и $L_n^+(h)$ в состоянии $m+1$.

Пусть $g_-=F^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, $g_+>\lambda^{-1}((m-1)h)$. Обозначим

$$\bar{f}(x,\theta)=1_{(g_-,+\infty)}(x)f(x,\theta)+\frac{\varepsilon}{2}\delta(x-g_+), \tag{5}$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака [6].

Теорема 1. Если для искаженной модели наблюдений (4) выполнены предположения П1 и П2, то величины $\alpha^+(h,\varepsilon)$, удовлетворяют неравенству $\alpha^+(h,\varepsilon)\le\alpha^+(\bar{f},\varepsilon)$.

Следствие 1. Вероятность ошибки первого рода $\alpha^+(\bar{f},\varepsilon)$ монотонно возрастает по переменной ε, в частности, для любого ε, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, выполняется неравенство $\alpha^+(\bar{f},\varepsilon)\le\alpha^+(\bar{f},\varepsilon_0)$.

Рассмотрим плотность распределения вероятностей

$$h^g(x,\theta)=1_{[g_-,g_+]}(x)h(x,\theta)+\varepsilon_-\delta(x-g_-)+\varepsilon_+\delta(x-g_+), \tag{6}$$

где g_- и g_+ – заданные параметры усечения наблюдения, имеющего плотность распределения вероятностей $h(x,\theta)$ и функцию распределения вероятностей $H(x,\theta)$, $\varepsilon_-=H(g_-,\theta)$, $\varepsilon_+=1-H(g_+,\theta)$.

Пусть

$$\bar{f}^{g}(x,\theta)=1_{[g_-,g_+]}f(x,\theta)+(\varepsilon_- -\varepsilon/2)\,\delta(x-g_-)+(\varepsilon_+ -\varepsilon/2)\,\delta(x-g_+)\,.$$

Если $h\in L_1(f,\varepsilon)$, то $h^g\in L_1(f^g,\varepsilon)$, и следовательно, $\bar{f}^g\in L_1(f^g,\varepsilon)$.

Теорема 2. Если для искаженной модели наблюдений (6) выполнены предположения П1 и П2, то величины $\alpha^+(h^g,\varepsilon)$, удовлетворяют неравенству $\alpha^+(h^g,\varepsilon)\le\alpha^+(\bar{f}^g,\varepsilon)$.

Следствие 2. Вероятность ошибки первого рода $\alpha^+(\bar{f}^g,\varepsilon)$ монотонно возрастает по переменной ε, в частности, для любого ε, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, выполняется неравенство $\alpha^+(\bar{f}^g,\varepsilon)\le\alpha^+(\bar{f}^g,\varepsilon_0)$.

Литература

1. *Вальд А*. Последовательный анализ. М. 1960.
2. *Хьюбер П*. Робастная статистика. М. 1984.
3. *Kharin A, Kishylau D.* Robust sequential testing of hypotheses on discrete probability distributions // Austrian Journal of Statistics. V. 34. 2005. № 2. P. 153-162.
4. *Charnou S*. Sequential test robustifications for simple hypothesis under outliers. // Abstracts of the International Conference on Robust Statistics. Parma. 2009. P. 22.
5. *Kharin A., Chernov S.* Error Probabilities Evaluation for Sequential Testing of Simple Hypotheses on Data from Continuous Distribution // Proc. of the Pattern Recognition and Information Processing (PRIP). Minsk. 2009. P. 63–66.
6. *Кудрявцев Л. Д*. Курс математического анализа. М. 1981.

ОБ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРА ПОЛОЖЕНИЯ α – УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Чэнь Хайлун

На основании свойства устойчивых распределений доказано равенство, для получения преобразования с α – устойчивым распределением. Методом характеристических функций (CF) получаем оценки параметров α и σ, затем с помощью преобразования предлагается метод оценки параметра положения μ α – устойчивого распределения при $\alpha\in(0;2]$.

1. МЕТОД CF ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ.

Случайная величина X называется устойчивой, если ее логарифм характеристической функции имеет вид:

$$\psi(\theta)=\ln(\varphi(\theta))=\begin{cases}-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha+i\left(\mu\theta+\sigma^\alpha|\theta|^\alpha\beta\,sign(\theta)\tan\dfrac{\pi\alpha}{2}\right),\alpha\ne1,\\ -\sigma|\theta|+i\left(\mu\theta-\sigma|\theta|\beta\dfrac{2}{\pi}sign(\theta)\ln|\theta|\right),\quad \alpha=1.\end{cases}\qquad(1)$$