подгруппа A субнормальна в группе G. Данный результат был усилен Ито и Сепом [2], которые доказали, что в этом случае фактор-группа A/A_G нильпотентна.

Ряд важных результатов, связанных с системами перестановочных подгрупп был получен А.Н. Скибой (см. обзор [3]).

Доказаны следующие результаты:

Теорема 1. Пусть G — конечная группа четного порядка, $1 \neq H < G$ и $|H|$ — нечетное число. Если H перестановочна с любой 2-подгруппой группы G, тогда $H \subseteq O(G)$.

Теорема 2. Пусть G — конечная группа четного порядка, $1 \neq H < G$ и $|H|$ — нечетное число. Если H перестановочна со всеми инволюциями группы G, то $S(G) \neq 1$.

Литература

1. *Ore O.* Contributions in the theory of groups of finite oder // Duke Math. J. 1939. Vol. 5. P. 431-460.

2. *Ito N., Srep J.* Uder die Quasinormalteiler vor endlichen Gruppen // Act. Sci. Math. 1962. Vol. 23. P. 169-170.

3. *Skiba A.N.* Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. 2006. Т. 36. № 3. С. 12–31.

СВОБОДНЫЕ ПОДГРУППЫ В ОБОБЩЕННЫХ ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ ГРУППАХ

Сюин Хуа[1], В.В. Беняш-Кривец[2]

[1] Харбин, Китай
huaxiuyingnihao@163.com

[2] Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, 220030 Минск, Беларусь
benyash@bsu.by

Обобщенные тетраэдральные группы имеют копредставление вида

$$G = \langle a_1, a_2, a_3 \mid a_1^{e_1} = a_2^{e_2} = a_3^{e_3} = R_1^m(a_1, a_2) = R_2^p(a_1, a_3) = R_3^q(a_2, a_3) = 1 >,$$

где R_1, R_2, R_3 — циклически редуцированные слова в свободной группе, порожденной a_1, a_2, a_3, которые не являются собственной степенью, показатели e_1, e_2, e_3 либо равны 0, либо $\geqslant 2$, а показатели m, p, $q \geqslant 2$. Будем говорить, что группа G имеет тип (e_1, e_2, e_3, m, p, q). Если для группы G выполнено одно из условий: G содержит либо неабелеву свободную подгруппу, либо разрешимую подгруппу конечного индекса, то говорят, что группа G удовлетворяет альтернативе Титса. В [1] Файн и Розенбергер выдвинули гипотезу, что обобщенные тетраэдральные группы удовлетворяют альтернативе Титса. Ими получен ряд результатов, подверждающих эту гипотезу. В частности, доказано, что если $\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 2$, то G удовлетворяет альтернативе Титса. Однако для большого числа типов групп эта гипотеза остается недоказанной.

Теорема 1. *1. Пусть G — обобщенная тетраэдральная группа одного из типов: $(2,3,10,2,2,2)$, $(2,4,5,2,2,2)$, $(2,5,6,2,2,2)$. Тогда G содержит неабелеву свободную подгруппу. В частности, G удовлетворяет альтернативе Титса.*

2. Пусть G — обобщенная тетраэдральная группа типа $(0,2,2,2,2,2)$. Тогда G содержит неабелеву свободную подгруппу во всех случаях, за исключением групп $G_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \mid a_2^2 = a_3^2 = (a_1a_2)^2 = (a_1a_3)^2 = (a_2a_3)^2 = 1\rangle$ и $G_2 = \langle a_1, a_2, a_3 \mid a_2^2 = a_3^2 = (a_1^2a_2)^2 = (a_1a_3)^2 =$ char"3D $(a_2a_3)^2 = 1\rangle$, которые являются разрешимыми. В частности, G удовлетворяет альтернативе Титса.

Литература

1. *Fine B., Rosenberger G.* Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products. New York: Marcel Dekker, 1999.

СЕРВАНТНЫЕ ПОДКОЛЬЦА КОЛЕЦ $\mathbb{Z}_\chi$

А.В. Царев

Московский педагогический госуниверситет,
Краснопрудная 14, 107140 Москва, Россия
an-tsarev@yandex.ru

Пусть $\chi = (m_p)$ — произвольная последовательность, состоящая из целых неотрицательных чисел и символов ∞, занумерованная всеми простыми числами. Этой последовательности поставим в соответствие набор колец K_p, где $K_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ - кольцо целых p-адических чисел или $K_p = \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$ соответственно при $m_p = \infty$ и $m_p < \infty$. Кольцо $\prod_{p\in P} K_p$ будем обозначать $\mathbb{Z}_\chi$. Через ε_p обозначим единицу кольца K_p и ее образ при естественном вложении $K_p \to \mathbb{Z}_\chi$.

Пусть $x = (x_p)$ — произвольный элемент кольца $\mathbb{Z}_\chi$. Ему соответствует идемпотент $\xi = (\xi_p) \in \mathbb{Z}_\chi$, такой что $\xi_p = \varepsilon_p$ при $x_p \neq 0$ и $\xi_p = 0$ при $x_p = 0$. Рассмотрим группу $L(x)$, сервантно порожденную множеством всех натуральных степеней элемента x в идеале $\xi\mathbb{Z}_\chi$,

$$L(x) = \langle x^k \mid k \in \mathbb{N} \rangle_* \subseteq \xi\mathbb{Z}_\chi.$$

Нетрудно видеть, что множество $L(x)$ замкнуто относительно операций $+$ и $\cdot$, определенных в кольце $\mathbb{Z}_\chi$.

Теорема 1. *$L(x)$ является кольцом с единицей тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *$L(x)$ имеет конечный ранг;*

2) *элемент x почти не имеет ненулевых нильпотентных p-компонент.*

Следствие 1. *Если $L(x)$ — кольцо конечного ранга, то $L(x) = L(x_1) \oplus L(x_2)$, где x_1 — нильпотентный элемент, а $L(x_2)$ — кольцо с единицей.*

Многочлен f будем называть *минимальным многочленом элемента* x, если f — целочисленный многочлен наименьшей степени, такой что $f(x) = 0$. Минимальный многочлен не обязан быть нормированным, в связи с этим он определен не однозначно, однако, нетрудно видеть, что любые два минимальных многочлена одного и того же элемента могут отличаться только целыми множителями.

Теорема 2. *Если $L(x)$ — бесконечное кольцо с единицей, f — минимальный многочлен элемента x и $f = f_1^{r_1} f_2^{r_2} \dots f_k^{r_k}$ — его каноническое разложение над кольцом $\mathbb{Z}$, то*

1) *$L(x) = L(x_1) \oplus L(x_2) \oplus \dots \oplus L(x_k)$, причем $f_i^{r_i}$ является минимальным многочленом элемента x_i для каждого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$;*

2) *слагаемые в разложении из п. 1) определяются однозначно с точностью до порядка следования и конечных прямых слагаемых.*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ, № МК-3345.2007.1