Литература

1. *Сибирский К. С., Шубэ А. С.* Полудинамические системы. Кишинёв: «Штиинца». 1987.
2. *Калитин Б. С.* Качественная теория устойчивости движения динамических систем. Минск: БГУ. 2002.

ДОМИНАНТНО-ТРЕУГОЛЬНЫЕ ГРАФЫ

Ю. А. Картынник

Треугольным [1] называется граф G, удовлетворяющий следующему «треугольному условию»: для любого максимального независимого множества I и любой пары u, v смежных вершин в G, не входящих в I, найдётся вершина $w \in I$, такая что тройка вершин u, v, w порождает треугольник в этом графе [2].

Треугольные графы возникают, в частности, в задачах покрытия базовыми станциями ячеек сотовых сетей, в некоторых задачах теории расписаний. Сложность распознавания треугольных графов до сих пор является открытой проблемой. Предполагается, что распознавание треугольных графов является co-NP-полной задачей [3].

В настоящей работе изучаются вычислительная сложность и сложность аппроксимации ряда задач доминирования и независимости в новом подклассе треугольных графов.

Назовём граф доминантно-треугольным, если для любого минимального доминирующего множества D и любой пары u, v смежных вершин в G, не входящих в D, найдётся вершина $w \in D$, такая что тройка вершин u, v, w порождает треугольник в этом графе.

Доминантно-треугольные графы образуют подкласс $\mathfrak{D}$ класса треугольных графов, т.к. каждое максимальное независимое множество является доминирующим.

Замкнутым окружением $N[v]$ вершины v называется множество, состоящее из вершины v и всех вершин, смежных с v. Замкнутым собственным окружением $PN[e]$ ребра e называется множество вершин, смежных одновременно с двумя его концевыми вершинами, включающее сами концевые вершины. Другими словами, $PN[uv] = N[u] \cap N[v]$.

Следующая теорема показывает, что доминантно-треугольные графы допускают простой полиномиальный алгоритм распознавания.

Теорема 1 (критерий доминантной треугольности). Граф G является доминантно-треугольным тогда и только тогда, когда в замкнутом собственном окружении каждого ребра e этого графа найдется вершина w, собственное окружение которой целиком содержится в $PN[e]$, т.е.

$$G \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow \forall e \in E_G \; \exists w \in PN[e]\colon N[w] \subseteq PN[e].$$

Этот критерий позволяет также установить, что каждое ребро доминантно-треугольного графа, обе вершины которого имеют отличную от единицы степень, лежит в некотором треугольнике. В частности, класс доминантно-треугольных деревьев исчерпывается звёздами $K_{1,n}$.

Следующее простое наблюдение часто оказывается полезным инструментом при работе с доминантно-треугольными графами.

Лемма 1 (о клике). Если замкнутое окружение вершины w порождает полный подграф K, то $N[w] \subseteq PN[e]$ для каждого ребра $e \in E_K$.

Таким образом, если в графе удаётся обнаружить набор вершин с замкнутыми окружениями, порождающими полные подграфы, которые, в свою очередь, покрывают все рёбра графа, то можно утверждать, что этот граф является доминантно-треугольным.

Класс доминантно-треугольных графов не является наследственным, более того, для произвольного графа G всегда существует доминантно-треугольный граф, содержащий G в качестве порождённого подграфа. Тем не менее, классу $\mathfrak{D}$ присущи интересные «псевдонаследственные» свойства.

Теорема 2. Класс доминантно-треугольных графов замкнут относительно удаления произвольного множества вершин вместе с их окружениями (это свойство назовём окрестностной наследственностью).

Теорема 2 влечёт возможность характеризации класса $\mathfrak{D}$ в терминах запрещённых ко-окрестностных подграфов, т.е. подграфов, получаемых из данного графа удалением произвольного множества вершин с их окружениями. Частным случаем окрестностной наследственности является конаследственность, присущая и треугольным графам [1] – свойство замкнутости класса треугольных графов относительно удаления произвольного максимального независимого множества вершин (возможно, пустого) вместе с их окружениями. Получающиеся в результате такой операции подграфы называются ко-стабильными. Можно показать, что характеризация доминантно-треугольных графов в терминах запрещенных ко-стабильных подграфов, как и в терминах запрещенных ко-окрестностных подграфов, содержит бесконечное число графов. Этот вывод, в частности, не позволяет использовать результат И.Е. Зверовича и И.И. Зверович [4] об NP-полноте задачи о наибольшем независимом множестве в ко-наследственном классе графов, обладающем конечной характеризацией в терминах запрещённых ко-стабильных подграфов.

Числом независимого доминирования $i(G)$ называется наименьшая мощность независимого доминирующего множества графа G.

Окрестностным множеством называется множество вершин S, таких что объединение подграфов, порождённых их замкнутыми окружениями, даёт исходный граф: $G = \bigcup_{v \in S} G(N[v])$.

Независимым окрестностным числом $n_i(G)$ [1] называется наименьшая мощность множества вершин графа G, являющегося одновременно окрестностным и независимым.

В работе [1] показано, что параметры $i(G)$ и $n_i(G)$ совпадают для треугольного графа G, а также установлены границы точности для полиномиальных алгоритмов аппроксимации этих параметров в предположении $P \neq NP$. Следующая теорема показывает, что эти результаты остаются верными и в более узком классе доминантно-треугольных графов.

Теорема 3. Задача определения числа независимого доминирования $i(G)$ или, что то же самое, независимого окрестностного числа $n_i(G)$, NP-трудна в классе доминантно-треугольных графов и не может быть аппроксимирована за полиномиальное время с точностью до множителя $n^{1-\varepsilon}$ для любого положительного ε (если $P \neq NP$), где n – число вершин графа G.

Числом доминирования $\gamma(G)$ называется наименьшая мощность доминирующего множества вершин графа G, т.е. такого, что каждая вершина вне этого множества смежна с некоторой вершиной в нём.

Окрестностным числом $n(G)$ называется наименьшая мощность окрестностного множества в графе G.

Следующие результаты настоящей работы послужили основной мотивацией для введения нового подкласса класса треугольных графов.

Теорема 4. В доминантно-треугольном графе каждое доминирующее множество является одновременно и окрестностным множеством.

Теорема 5. Задача определения числа доминирования $\gamma(G)$ графа G NP-трудна в классе доминантно-треугольных графов, и остаётся NP-трудной даже при дополнительном условии, что граф является планарным и имеет максимальную степень не выше 6.

Теорема 6. Задача вычисления параметра $\gamma(G)$ в классе доминантно-треугольных графов совпадает с задачей вычисления параметра $n(G)$ и является NP-трудной. Если $P \neq NP$, то не существует полиномиального алгоритма для аппроксимации $\gamma(G)$ и $n(G)$ в классе доминантно-треугольных графов с точностью до константы, меньшей $k \log|V_G|$ для некоторого $k > 0$.

Одной из классических NP-полных задач является задача распознавания гамильтоновости графа. Она заключается в определении того, существует ли в заданном графе гамильтонов цикл – простой цикл, содержащий каждую вершину графа ровно по одному разу.

Теорема 7. Задача распознавания гамильтоновости доминантно-треугольного графа является NP-полной.

Существует несколько известных и хорошо изученных подклассов класса треугольных графов, в частности, пороговые, эквистабильные и строго эквистабильные графы, а также графы разбиений [5]. Интересным является вопрос о месте доминантно-треугольных графов в этой иерархии. Нами выдвинута гипотеза, что доминантно-треугольные графы составляют подкласс графов разбиений.

Граф G называется графом разбиений, если существует множество S и семейство его подмножеств $S_i,\ i \in J,$ с которыми установлено взаимное однозначное соответствие вершин графа G, такое что: 1) вершины графа G смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им подмножества пересекаются (G – граф пересечений S_i); 2) подмножества, соответствующие произвольному максимальному независимому множеству вершин в G, образуют разбиение множества S (попарно не пересекаются и в объединении дают S). Наша гипотеза основана на том, что все конструкции, использованные в доказательствах NP-полноты задач в классе доминантно-треугольных графов, являются также графами разбиений. При этом известные нам треугольные графы на не более чем 10 вершинах, не являющиеся графами разбиений, не являются и доминантно-треугольными. В то же время простой цикл на четырех вершинах является примером не доминантно-треугольного графа разбиений.

Остаются открытыми вопросы о сложности задач определения числа независимости и наибольшей мощности минимального доминирующего множества в классе доминантно-треугольных графов. Эти вопросы представляют интерес для дальнейшего изучения.

Литература

1. *Orlovich Y., Zverovich I.* Independent domination in triangle graphs // Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2007. Vol. 28. P. 341–348.
2. *McAvaney K., Robertson J., DeTemple D.* A characterization and hereditary properties for partition graphs // Discrete Math. 1993. Vol. 113, № 1–3. P. 131–142.
3. *Kloks T., Lee C.-M., Liu J., Müller H.* On the recognition of general partition graphs // Lecture Notes in Comput. Sci. 2003. Vol. 2880. P. 273–283.
4. *Zverovich I. I, Zverovich I. E.* Negative results on the stability problem within co-hereditary classes // J. Combin. Math. Combin. Comput. 2005. Vol. 53. P. 155–163.
5. *Miklavič Š., Milanič M.* Equistable graphs, general partition graphs, triangle graphs, and graph products // Discrete Appl. Math. 2011. Vol. 159, № 11. P. 1148–1159.