

АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РЕЛЯТИВИСТСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Е.К. Макаров¹, А.А. Афанасьев², А.Н. Рубинов²

¹ Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
jcm@im.bas-net.by

² Институт физики НАН Беларуси имени Б.И.Степанова, пр. Независимости 68, 220072 Минск, Беларусь

Эффекты взаимодействия излучения с веществом в физической оптике рассматриваются на основе модели гармонического осциллятора и ряда ее нелинейных обобщений [1, с. 127–194]. В том случае, когда интенсивность излучения велика, может возникнуть необходимость учета релятивистских эффектов. Уравнение колебаний релятивистского осциллятора имеет вид

$$\frac{\ddot{x}}{(\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2})^3} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad (1)$$

где $\gamma > 0$ — коэффициент затухания колебаний, ω_0 — собственная частота осциллятора, а $f(t)$ представляет собой внешнее возбуждение, которое будем предполагать периодическим.

Наибольший интерес для приложений к физической оптике представляет случай гармонического (мономатического) внешнего воздействия $f(t) = a \sin \omega t$ с амплитудой a и частотой ω . В работе [2] для решения этой задачи в квазирелятивистском приближении предложен метод детального равновесия и получено аналитическое решение выраженное через эллиптические функции. В случае релятивистского осциллятора это оказалось невозможным. Тем не менее, применение метода детального равновесия позволяет полностью построить приближенное представление для амплитудной кривой уравнения (1).

Ключевым моментом здесь является алгебраическая аппроксимация имеющей точное выражение через эллиптические интегралы зависимости круговой частоты ω решения уравнения (1) при $\gamma = 0$ от амплитуды A и коэффициента ω_0 . С помощью этого приема получены приближенные неявные формулы для амплитуды колебаний в случае нулевых потерь

$$\omega = \pi c \left(\frac{A\omega_0^2 \pm a}{A(\pi^2 c^2 \pm 4aA + 4\omega_0^2 A^2)} \right)^{1/2}$$

В резонансном случае, когда внешняя сила полностью компенсирует потери, для резонансной амплитуды получена формула

$$A = \frac{a}{\gamma\omega} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{1-\mu^2} \sqrt{1+\sqrt{1-\mu^2}}}, \quad \mu = \frac{a}{\gamma c}$$

В общем случае найдено параметрическое представление для амплитудных кривых и установлено, что релятивистский осциллятор имеет амплитудно-частотную характеристику обычного для нелинейного осциллятора клювообразного вида с наклоном в сторону меньших частот. Отметим, что, в отличие от линейного случая, при $a/\gamma c < 1$ амплитудно-частотная кривая уравнения (1) распадается на две несвязные ветви, таким же образом, как и при $\gamma = 0$.

Литература

1. Ахманов С.А., Никитин С.Ю. Физическая оптика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
2. Макаров Е.К., Афанасьев А.А., Рубинов А.Н. Точное решение уравнения квазирелятивистского осциллятора с периодическим возбуждением // Первая междунар. конф. "Математическое моделирование и дифференциальные уравнения": Тез. докл. Минск. 2-5 октября 2007 г., Институт математики НАН Беларуси, Минск, 2007, С. 40-42.