# МЕТОД ОБЪЕКТНЫХ РЕЗОЛЮЦИЙ В ЗАДАЧАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

**О. В. Шут**

*Белорусский государственный университет*
*Минск, Беларусь*
*E-mail: olgashut@tut.by*

Рассматривается взаимосвязь между прецедентным и логическим способами представления информации в задаче распознавания образов. Установлена связь между операциями над объектами и булевыми операциями. Показана полнота системы операций над объектами. Разработаны алгоритмы преобразования способов представления информации. Предложен метод объектных резолюций для прецедентного подхода.

*Ключевые слова*: распознавание, логический подход, прецедентный подход, метод резолюций.

## ПРЕЦЕДЕНТНЫЙ И ЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОДЫ

Рассмотрим следующую задачу $Z$.

Пусть на конечном множестве объектов $X$ задано конечное число подмножеств (классов) $X_1,...,X_l$. Имеется начальная информация $I_0$ о принадлежности к классам множества объектов $X^0 \subset X$. Требуется указать алгоритм, определенный на всем множестве $X$, который на основании информации $I_0$ для произвольного объекта $x \in X$ вычисляет принадлежность $x$ к классам $X_1,...,X_l$.

Данная постановка задачи является максимально общей. Задачи подобного типа можно разделить на две группы:

1. Задача $Z_1$. Способ описания классов – логический: через предикаты (правила), которые одновременно используются как для описания объектов, так и для описания функции принадлежности классам. Информация о принадлежности объектов, удовлетворяющих правилам, считается заданной. Необходимо для указанного объекта $x$ определить, выводится ли он из правил, описывающих класс $X_i$, $i = \overline{1,l}$.

В качестве примера задачи $Z_1$ можно привести задачу классификации формул в исчислении высказываний. Такие задачи решаются дедуктивными методами, например, методом резолюций [1], с помощью которого можно описать все объекты, принадлежащие классу $X_i$. Задачи, подобные задаче $Z_1$, носят, как правило, чисто теоретический характер.

2. Задача $Z_2$. Способ описания классов – прецедентный: явное указание объектов, принадлежащих каждому из классов $X_1,...,X_l$. Требуется указать алгоритм, который на основании начальной информации для произвольного объекта $x \in X$ вычисляет принадлежность $x$ к классам $X_1,...,X_l$.

К задачам подобного вида сводится большинство практических задач из области распознавания образов и искусственного интеллекта. Существует огромное разнообразие алгоритмов решения таких задач, например, параметрическое семейство алгоритмов.

В данной работе исследуется взаимосвязь между прецедентным и логическим способами представления информации в задачах $Z_1$ и $Z_2$, а также предлагается модификация метода резолюций для задач распознавания.

## АЛГОРИТМЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Воспользуемся моделью описания объектов, предложенной в [ ]. Пусть объект имеет $n$ признаков. Обозначим через $S_j$ множество признаков, из которого выбирается $j$-й признак, а через $D_j$ – множество значений этого признака. Объектом будем называть отображение вида

$$p : S_1 \times S_2 \times ... \times S_n - D_1 \times D_2 \times ... \times D_n .$$

Если у объекта $p$ признак $s_j \in S_j$ имеет значение $d_j \in D_j$, $j = \overline{1,n}$, то запишем это следующим образом:

$$p(s_1, s_2, ..., s_n) = (d_1, d_2, ..., d_n) .$$

В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что $D_j = \{0, ..., |D_j| - 1\}$.

Объекты будем считать равными, если множества их признаков равны, а значения соответствующих признаков совпадают.

Набором объектов будем называть множество объектов, в котором все объекты обладают одним и тем же множеством признаков. Если набор $P$ состоит из объектов $p_1, p_2, ..., p_r$, будем записывать это следующим образом:

$$P = \{p_1, p_2, ..., p_r\} ,$$

где $p_i(s_1, s_2, ..., s_n) = (d_{i1}, d_{i2}, ..., d_{in})$, $i = \overline{1,r}$.

Наборы объектов $P$ и $Q$ будем считать равными, если для любого объекта, входящего в набор $P$, найдется равный ему объект, входящий в $Q$, и наоборот.

Если значение $j$-го признака объекта не задано, обозначим это специальным символом, например, «?». Объект $p$, значение $j$-го признака которого неизвестно, рассматривается как набор $|D_j|$ различных объектов, у которых $j$-й признак принимает по одному разу все возможные значения, а значения всех остальных признаков совпадают со значениями соответствующих признаков $p$:

$$p = (..., \overset{j}{?}, ...) = \{(..., \overset{j}{0}, ...), (..., \overset{j}{1}, ...), ..., (..., \overset{j}{|D_j| - 1}, ...)\}$$

В литературе введены операции отрицания, умножения и сложения объектов и наборов и доказаны многие свойства этих операций, а также показано, что любой набор может быть представлен в виде суммы объектов, входящих в этот набор, а любой объект, в свою очередь, может быть представлен в виде произведения его признаков.

**Теорема 1**. Операции умножения, сложения и отрицания наборов объектов в алгебре объектов эквивалентны булевым операциям конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

**Следствие 1**. Система операций над наборами объектов $\{-,\wedge,\vee\}$ является полной.

Построим алгоритмы, преобразующие логический способ описания информации в прецедентный и наоборот соответственно. Предварительно введем некоторые соглашения. Будем считать, что все объекты имеют $n$ признаков из множества $S=\{s_1,...,s_n\}$. Далее, признак, принимающий $k$ значений, где $k>2$, заменим на $k$ признаков, каждый из которых принимает значения 0 или 1 и обозначает, что исходный признак принимает значение с соответствующим номером. Обозначим $D=\{0,1\}$. В дальнейшем будем считать, что все признаки принимают значения из $D$.

Рассмотрим правило $\varphi$, описывающее принадлежность объекта конкретному классу. На вход этого правила поступает $n$ значений признаков из $D$. Пусть рассматривается объект $p(s_1,s_2,...,s_n)=(d_1,d_2,...,d_n)$. Необходимо определить, принадлежит ли $p$ классу $Y$. Пусть значение 0 на выходе правила означает, что $p\notin Y$, а значение 1 означает, что $p\in Y$:

$$\varphi(d_1,...,d_n)=\begin{cases}1, p\in Y\\ 0, p\notin Y\end{cases}.$$

Тогда $\varphi: D^n\to D$, т. е. $\varphi$ является булевой функцией.

Для перехода от логического представления информации, используемого в задаче $Z_1$, к прецедентному, используемому в задаче $Z_2$, разработан алгоритм $In_{12}$, а для перехода от прецедентного представления множества объектов к логическому – алгоритм $In_{21}$.

Общая схема алгоритма $In_{12}$:

1. Каждой переменной в $\varphi$ ставится в соответствие объект.

2. Выполняются операции над объектами, соответствующие логическим операциям в $\varphi$.

Пусть $P=In_{12}(\varphi)$ обозначает, что набор $P$ является результатом применения алгоритма $In_{12}$ к правилу $\varphi$.

**Теорема 2**. Для произвольного правила $\varphi$ и произвольного объекта $p(s_1,s_2,...,s_n)=(d_1,d_2,...,d_n)$ справедливо утверждение:

$$\varphi(d_1,...,d_n)=1 \quad\Leftrightarrow\quad p\in In_{12}(\varphi)$$

Общая схема алгоритма $In_{21}$:

1. Каждому признаку заданного набора объектов ставится в соответствие переменная.

2. Для каждого объекта выполняется конъюнкция переменных, соответствующих его признакам.

3. В качестве искомого правила берется дизъюнкция выражений, полученных на шаге 2.

Пусть $\varphi = In_{21}(P)$ обозначает, что правило $\varphi$ является результатом применения алгоритма $In_{21}$ к набору $P$.

**Теорема 3**. Для произвольного набора объектов $P$ и произвольного объекта $p(s_1, s_2, ..., s_n) = (d_1, d_2, ..., d_n)$ справедливо утверждение:

$$p \in P \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(d_1, ..., d_n) = 1,$$

где $\varphi = In_{21}(P)$.

Покажем, что преобразования, производимые алгоритмами $In_{12}$ и $In_{21}$, являются взаимно-обратными.

**Теорема 4**. Для произвольного правила $\varphi$, произвольного набора объектов $P$ и произвольного объекта $p(s_1, s_2, ..., s_n) = (d_1, d_2, ..., d_n)$ справедливы утверждения:

$$\varphi(d_1, ..., d_n) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (In_{21} \circ In_{12}(\varphi))(d_1, ..., d_n) = 1;$$

$$p \in P \quad \Leftrightarrow \quad p \in (In_{12} \circ In_{21}(P)).$$

## МЕТОД ОБЪЕКТНЫХ РЕЗОЛЮЦИЙ

Построение алгоритмов $In_{12}$ и $In_{21}$ дает возможность исследовать вопрос применимости методов решения задачи $Z_1$ к задаче $Z_2$ и наоборот. В данном разделе рассматривается использование метода резолюций в задаче $Z_2$.

Модифицируем метод резолюций таким образом, чтобы его можно было применять к исходным данным, заданным прецедентным способом. Этот модифицированный метод назовем методом объектных резолюций.

Обозначим значение произвольного признака $s$ произвольного объекта $p$ через $d_p(s)$, где $d_p : S -\ \{0,1,?\}$.

Рассмотрим объекты $p$ и $q$ и признак $h$ такие, что $d_p(h) = 1$, $d_p(h) = 0$. Будем считать, что для объектов $p$ и $q$ такой признак $h$ единственный (т. е. значения остальных признаков либо совпадают, либо не заданы хотя бы в одном объекте). Объектной резольвентой назовем объект $r$, значения признаков которого определяются по следующим правилам:

1. $d_r(h) = ?$.

2. Если хотя бы в одном объекте значение признака $s$, где $s \neq h$, не задано, т. е. $d_p(s) = ?$ или $d_q(s) = ?$, то $d_r(s) = d_q(s)$ или $d_r(s) = d_p(s)$ соответственно.

3. Если в обоих объектах значение признака $s$ задано, то $d_r(s) = d_p(s) \wedge d_q(s)$.

**Теорема 5**. Рассмотрим объекты $p$ и $q$. Пусть $\exists! h$, $d_p(h) = 1$, $d_p(h) = 0$. Пусть $r$ – объектная резольвента для $p$ и $q$, $t$ – объект, соответствующий классической резольвенте для формул, описывающих $p$ и $q$. Тогда $t = r$.

Опишем алгоритм метода объектных резолюций. Предположим, что о некотором множестве объектов $R$ известно, что все его объекты принадлежат одному классу. Требуется узнать, принадлежит ли этому классу объект $x$. Обозначим через $o$ объект, для которого не задано значение ни одного признака: $\forall s \in S \ \ d_o(s) = ?$.

Алгоритм метода объектных резолюций:

1. Строим ДНФ $\varphi$, описывающую множество $R \cup \{x\}$.

2. Если $o \in \varphi$, то переходим к шагу 6, иначе – к шагу 3.

3. Если все пары объектов уже рассматривались, то переходим к шагу 6. Иначе выбираем из $\varphi$ такую нерассмотренную пару объектов $p$ и $q$, что $\exists! h$, $d_p(h) = 1$, $d_q(h) = 0$.

4. Строим объектную резольвенту $r$ для $p$ и $q$.

5. Заменяем $\varphi$ на ДНФ, описывающую множество $R \cup \{x, r\}$, и переходим к шагу 1.

6. Конец работы алгоритма.

Пример. Пусть $R = \{(11?), (1?1), (?00)\}$, $x = (0??)$.

Обозначим $f_1 = (11?)$, $f_2 = (1?1)$, $f_3 = (?00)$.

1) $p = f_1$, $q = x$ $\quad r = f_4 = (?1?)$;

2) $p = f_3$, $q = f_4$ $\quad r = f_5 = (??0)$;

3) $p = f_2$, $q = f_5$ $\quad r = f_6 = (1??)$;

4) $p = f_6$, $q = x$ $\quad r = o = (???)$.

Результат работы алгоритма интерпретируется следующим образом:

1. Если алгоритм закончил работу из-за получения объекта $o$, это значит, что, заменяя знаки «?» на конкретные значения признаков, из множества $R \cup \{x\}$ можно получить любой объект, т. е. $R \cup \{x\}$ потенциально содержит все возможные объекты из $X$. Поэтому объект $x$ и множество $R$ должны принадлежать разным классам.

2. Если алгоритм закончил работу из-за того, что все пары объектов были рассмотрены, это значит, что объект $o$ получить невозможно. Поэтому объект $x$ принадлежит тому же классу, что и множество $R$.

Если в задаче $Z_2$ исходные данные об объектах и их признаках являются достаточно полными для того, чтобы из них возможно было вывести полное описание разбиения множества $X$ на классы, то для каждого объекта будет получена информация о том, к какому классу из $X_1,...,X_l$ принадлежит данный объект. В противном случае объекты, описание которых невозможно вывести из описания классов, будут отнесены к $X \setminus (X_1 \cup ... \cup X_l)$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Чень, Ч.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем / Ч. Чень, Р. Ли. М.: Наука, 1983.
2. *Рябцев, А. В.* Алгебры для представления обучающей информации в задачах распознавания образов / А. В. Рябцев // Цифровая обработка. Минск, 2002. № 6. С. 80–94.
3. *Краснопрошин, В. В.* Распознавание с обучением как задача выбора / В. В. Краснопрошин, В. А. Образцов // Цифровая обработка изображений. Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 1998. С. 80–94.